基于权值优选的改进二阶中心差分粒子滤波算法

冉星浩，杨　路，李春波
（95668 部队，云南 昆明　650000）

摘要：针对标准粒子滤波算法难以解决的粒子退化问题和样本贫化现象，提出了基于权值优选的改进二阶中心差分粒子滤波算法。该算法主要从以下两方面进行改进：首先采用二阶中心差分滤波方法通过协方差矩阵的平方根来产生重要性密度函数，从而解决粒子退化问题；然后通过重采样方法的利用权值优选的思想来增加粒子集的多样性，有效避免了样本贫化的现象。仿真结果表明：该算法状态估计结果更加接近目标真实的状态估计，平均均方根误差也更低，跟踪效果更佳，同时保持了较高的运算效率。

关键词：粒子滤波；二阶中心差分滤波；权值优选；样本贫化
中图分类号：TP732　　**文献标识码**：A　　**文章编号**：1000－8829(2020)07－0068－05
doi：10.19708/j.ckjs.2020.05.254

An Improved Second-Order Central Difference Particle Filter Algorithm Based on Weight Optimization

RAN Xing-hao, YANG Lu, LI Chun-bo
(Unit 95668 of the PLA, Kunming 650000, China)

Abstract: In order to solve the problems of particle degradation and sample impoverishment after resampling, an improved second-order central difference particle filter algorithm based on weight optimization is proposed. The algorithm is mainly improved from the following two aspects. First, the second-order central difference filter is adopted to generate the importance density function through the square root of the covariance matrix to solve the problem of particle degradation, then the improved resampling method based on weight optimization is utilized to increase the diversity of the sample set and avoid the sample impoverishment. Simulation results show that the state estimation of the algorithm of the target is closer to the true value, the average root mean square error is also lower, which greatly improves the tracking accuracy and maintains a high operational efficiency.

Key words: particle filter; second-order central difference filter; weight optimization; sample impoverishment

现实世界中大部分目标模型是非线性非高斯的，粒子滤波算法凭借不受线性误差和高斯噪声条件约束的优势，广泛应用于雷达探测、制导导航、目标跟踪等热门领域，用以解决非线性、非高斯系统估计问题[1-6]。然而传统的粒子滤波算法不可避免地面临着粒子退化的问题，通过引进重采样过程可以大大改善此问题，但同时也会引发样本贫化现象，目前通用的办法是选取不同的合适重要性密度函数和不断改进重采样方法来解决[7]。文献[7]提出权值优选的思想来改进重采样方法，对不同粒子的权值进行优选，优选的方法为：在每次重采样过程中对归一化后的权值引入一个影响因子，经过优选后，粒子的权值得到调整，这样使得小权值的粒子权值变大，大权值的粒子权值变小，其多样性大大增加，以此来改善样本贫化现象。

收稿日期：2020－03－21
基金项目：国家自然科学基金青年项目(61601504)
作者简介：冉星浩(1994—)，男，硕士，助理工程师，主要研究领域为雷达目标检测与跟踪。

引用格式：冉星浩，杨路，李春波. 基于权值优选的改进二阶中心差分粒子滤波算法[J]. 测控技术，2020，39(7)：68－72.
RAN X H, YANG L, LI C B. An Improved Second-Order Central Difference Particle Filter Algorithm Based on Weight Optimization[J]. Measurement & Control Technology, 2020, 39(7): 68－72.

本文针对粒子退化问题以及样本贫化等现象,结合二阶中心差分滤波算法和上述权值优选的方法,提出了一种新的改进二阶中心差分粒子滤波(Improved Second-order Central Difference Particle Filtering, ISCDPF)算法。该算法首先采用二阶中心差分滤波[8](Second-order Central Difference Filtering, SCDF)算法来获取最优的重要性密度函数,以解决粒子退化问题,然后基于权值优选思想来改进重采样方法对粒子权值进行优选,通过改善粒子集的贫乏性来避免样本枯竭。通过仿真实验表明,该算法能够有效解决粒子退化问题,同时改善了样本贫化现象,明显提高了滤波精度,同时保持了较高的运算效率。

1 算法原理

1.1 传统粒子滤波算法

传统的粒子滤波算法诞生于蒙特卡罗思想,选取粒子集来近似模拟目标的后验概率密度函数,其通用性能够匹配任何形式的状态模型[9]。这种算法本质上是对重要性密度函数进行采样,然后可以得到一组随机的样本,近似于目标的后验概率密度函数,称这些样本为"粒子"[10],然后再计算不同粒子的权值,用这些粒子和其权值进行加权,加权后得到样本的均值,这样就可以代替贝叶斯估计中复杂的积分运算,从而得到目标的状态估计[11]。

假设系统方程与状态方程如下所示:

$$\boldsymbol{x}_k = f(\boldsymbol{x}_{k-1}) + \boldsymbol{w}_{k-1} \tag{1}$$

$$\boldsymbol{z}_k = h(\boldsymbol{x}_k) + \boldsymbol{v}_{k-1} \tag{2}$$

式中,$\boldsymbol{x}_k$ 为系统状态变量;$\boldsymbol{z}_k$ 为系统量测变量;$\boldsymbol{v}_k$、$\boldsymbol{w}_k$ 分别为过程噪声和系统噪声,是独立同分布的噪声序列。

后验概率密度为

$$p(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{z}_{1:k}) \approx \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{w}_k^i \delta(\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}_k^i) \tag{3}$$

$$q(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^i, \boldsymbol{z}_k) = p(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^i) \tag{4}$$

标准粒子滤波算法描述如下。

(1) 初始化:$k=0$。

首先根据先验分布 $p(\boldsymbol{x}_0)$ 产生初始粒子,所有粒子权值为 $1/N$:$\{\boldsymbol{x}_0^i, 1/N; i=1,2,\cdots,N\}$。

(2) 重要性采样:$k=1,2,\cdots,N$。

① 采样。

$$\boldsymbol{x}_k^i \sim q(\boldsymbol{x}_k^i \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^i, \boldsymbol{z}_k) = p(\boldsymbol{x}_k^i \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^i), i=1,2,\cdots,N \tag{5}$$

权值更新公式为

$$\boldsymbol{w}_k^i = \boldsymbol{w}_{k-1}^i \frac{p(\boldsymbol{z}_k \mid \boldsymbol{x}_k^i) p(\boldsymbol{x}_k^i \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^i)}{q(\boldsymbol{x}_k^i \mid \boldsymbol{x}_{k-1}^i, \boldsymbol{z}_k)} \tag{6}$$

② 更新粒子权值然后归一化。

$$\boldsymbol{w}_k^i = \boldsymbol{w}_{k-1}^i p(\boldsymbol{z}_k \mid \boldsymbol{x}_k^i) = \boldsymbol{w}_{k-1}^i p_{e_k}(\boldsymbol{z}_k - h(\boldsymbol{x}_k^i)), i=1,2,\cdots,N \tag{7}$$

归一化:

$$\tilde{\boldsymbol{w}}_k^i = \boldsymbol{w}_k^i / \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{w}_k^i \tag{8}$$

(3) 重采样。

计算 $N_{eff} = 1/\sum_{i=1}^{N} (\tilde{\boldsymbol{w}}_k^i)^2$,如果 $N_{eff} < N_{thr}$,N_{thr} 为阈值,根据 $p(\tilde{\boldsymbol{x}}_k^j = \boldsymbol{x}_k^i) = \tilde{\boldsymbol{w}}_k^i$ 的原则开始重采样,获取新的粒子集为 $\{\tilde{\boldsymbol{x}}_k^j, 1/N; j=1,2,\cdots,N\}$。

(4) 状态估计。

由式(6)估计系统状态及误差:

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = E(\boldsymbol{x}_k \mid \boldsymbol{z}_k) \approx \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{x}_k^i \cdot \tilde{\boldsymbol{w}}_k^i \tag{9}$$

$$\boldsymbol{P}_k = \sum_{i=1}^{N} \tilde{\boldsymbol{w}}_k^i (\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_k^i)(\hat{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{x}_k^i)^{\mathrm{T}} \tag{10}$$

(5) 令 $k=k+1$,返回步骤(2)。

1.2 SCDPF 算法

传统的粒子滤波算法中采用方法是选择先验概率作为最优建议分布近似形式,这种近似采样简单易行,权值的计算也较容易。然而这种传统算法最大的弊端在于采样样本并未融入量测值提供的实时信息,这种采样方法取得的样本与从目标真实的后验概率所采样取得的样本之间差异较大,会严重影响滤波效果[12]。

1.2.1 二阶 Stirling 插值展开式

设 $\boldsymbol{x} \in \mathbf{R}^n$ 为 n 维矢量,$\boldsymbol{y} = f(\boldsymbol{x})$,在 $\boldsymbol{x} = \bar{\boldsymbol{x}}$ 处用 Stirling 插值公式展开:

$$\boldsymbol{y} = f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \overline{\boldsymbol{D}_{\Delta_x}} f(\bar{\boldsymbol{x}}) + \frac{1}{2!}\overline{\boldsymbol{D}_{\Delta_x}^2} f(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{11}$$

式中,$\overline{\boldsymbol{D}_{\Delta_x}}$ 和 $\overline{\boldsymbol{D}_{\Delta_x}^2}$ 分别为一阶和二阶差分算子。

$$\overline{\boldsymbol{D}_{\Delta_x}} f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{\lambda}\left[\sum_{p=1}^{n} \Delta x_p \mu_p \delta_p\right] f(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{12}$$

$$\overline{\boldsymbol{D}_{\Delta_x}^2} f(\bar{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{\lambda^2}\left[\sum_{p=1}^{n} \Delta x_p^2 \delta_p^2 + \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} \Delta x_p \Delta x_q (u_p \delta_p)(u_q \delta_q)\right] f(\bar{\boldsymbol{x}}) \tag{13}$$

1.2.2 二阶中心差分粒子滤波算法

二阶中心差分粒子滤波(Second-Order Central Difference Particle Filter, SCDPF)算法也是基于改善重要性密度函数的方法进行改进,采用 SCDF 方法来获取最合适的重要性密度函数,然后进行采样,这样获得的粒子可以有效地融入最新的量测信息,这种方法的滤波精度要明显优于无迹粒子滤波方法。SCDPF 算法具体步骤如下。

(1) 初始化:$k=0$。

抽样粒子 $\boldsymbol{x}_0^i \sim p(\boldsymbol{x}_0)$,$i=1,2,\cdots,N$,则第 i 个粒子的预测为

$$\bar{\boldsymbol{x}}_0^i = E[\boldsymbol{x}_0^i] \tag{14}$$

$$\hat{\boldsymbol{P}}_0^i = E[(\boldsymbol{x}_0^i - \bar{\boldsymbol{x}}_0^i)(\boldsymbol{x}_0^i - \bar{\boldsymbol{x}}_0^i)^{\mathrm{T}}] \tag{15}$$

（2）二阶中心差分滤波：$k=1,2,\cdots,N$。

① 计算粒子一阶均差矩阵。

$$\boldsymbol{S}_{x\hat{x}}^{(1)}(k-1)=\{(f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+\lambda\hat{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1})-f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\lambda\hat{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1}))/2\lambda\} \tag{16}$$

$$\boldsymbol{S}_{xv}^{(1)}(k-1)=\{(f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1}+\lambda\boldsymbol{s}_{v,j})-f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1}-\lambda\boldsymbol{s}_{v,j}))/2\lambda\} \tag{17}$$

$$\boldsymbol{S}_{y\hat{x}}^{(1)}(k-1)=\{(h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1}+\lambda\bar{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{w}}_{k-1})-h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\lambda\bar{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{w}}_{k-1}))/2\lambda\} \tag{18}$$

$$\boldsymbol{S}_{yw}^{(1)}(k-1)=\{(h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1},\bar{\boldsymbol{w}}_{k-1}+\lambda\boldsymbol{s}_{w,j})-h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1},\bar{\boldsymbol{w}}_{k-1}-\lambda\boldsymbol{s}_{w,j}))/2\lambda\} \tag{19}$$

式中，$\hat{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{s}}_{x,j},\boldsymbol{s}_{v,j},\boldsymbol{s}_{w,j}$ 分别为矩阵 $\hat{\boldsymbol{S}},\bar{\boldsymbol{S}}_x,\boldsymbol{S}_v,\boldsymbol{S}_w$ 的第 j 列；$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1},\bar{\boldsymbol{x}}_{k-1}$ 分别为系统 $k-1$ 时刻系统的状态估计和预测。

② 计算每个粒子的一步预测 $\bar{\boldsymbol{x}}_0^i$。

$$\bar{\boldsymbol{x}}_k=\frac{l^2-n_x-n_v}{l^2}f(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1})+\frac{1}{2l^2}\sum_{p=1}^{n_x}[f(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}+\lambda\hat{\boldsymbol{s}}_{x,p},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1})+f(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}-\lambda\hat{\boldsymbol{s}}_{x,p},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1})]+\frac{1}{2l^2}\sum_{p=1}^{n_v}[f(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1}+\lambda\boldsymbol{s}_{v,p})+f(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1},\bar{\boldsymbol{v}}_{k-1}-\lambda\boldsymbol{s}_{v,p})] \tag{20}$$

③ 更新预测误差协方差矩阵。

$$\bar{\boldsymbol{P}}_k^i=\bar{\boldsymbol{S}}_k^i(\bar{\boldsymbol{S}}_k^i)^{\mathrm{T}} \tag{21}$$

④ 计算二阶均差矩阵。

$$\boldsymbol{S}_{xx}^{(2)}(k)=\left\{\frac{(\lambda^2-1)^{1/2}}{2\lambda^2}(f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_k+\lambda\hat{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{v}}_k)+f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_k-\lambda\hat{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{v}}_k)-2f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{v}}_k))\right\} \tag{22}$$

$$\boldsymbol{S}_{xv}^{(2)}(k)=\left\{\frac{(\lambda^2-1)^{1/2}}{2\lambda^2}(f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{v}}_k+\lambda\hat{\boldsymbol{s}}_{v,j})+f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{v}}_k-\lambda\hat{\boldsymbol{s}}_{v,j})-2f_i(\hat{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{v}}_k))\right\} \tag{23}$$

$$\boldsymbol{S}_{y\bar{x}}^{(2)}(k)=\left\{\frac{(\lambda^2-1)^{1/2}}{2\lambda^2}(h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_k+\lambda\bar{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{w}}_k)+h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\lambda\bar{\boldsymbol{s}}_{x,j},\bar{\boldsymbol{w}}_k)-2h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{w}}_k))\right\} \tag{24}$$

$$\boldsymbol{S}_{yw}^{(2)}(k)=\left\{\frac{(\lambda^2-1)^{1/2}}{2\lambda^2}(h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{w}}_k+\lambda\bar{\boldsymbol{s}}_{w,j})+h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{w}}_k-\lambda\bar{\boldsymbol{s}}_{w,j},\bar{\boldsymbol{w}}_k)-2h_i(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{w}}_k))\right\} \tag{25}$$

⑤ 预测量测方程。

$$y_k=\frac{\lambda^2-n_x-n_w}{\lambda^2}h(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{w}}_k)+\frac{1}{2\lambda^2}\sum_{p=1}^{n_x}[h(\bar{\boldsymbol{x}}_k-\lambda\bar{\boldsymbol{s}}_{x,p},\bar{\boldsymbol{w}}_k)+h(\bar{\boldsymbol{x}}_k+\lambda\bar{\boldsymbol{x}}_{x,p},\bar{\boldsymbol{w}}_k)]+\frac{1}{2\lambda^2}\sum_{p=1}^{n_w}[h(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{w}}_k+\lambda\boldsymbol{s}_{w,p})+h(\bar{\boldsymbol{x}}_k,\bar{\boldsymbol{w}}_k-\lambda\boldsymbol{s}_{w,p})] \tag{26}$$

式中，n_w 为量测噪声向量的维数。

预测误差交叉均方矩阵为

$$\boldsymbol{P}_{xy}^i(k)=\bar{\boldsymbol{S}}_x^i(k)[(\boldsymbol{S}_{y\bar{x}}^{(1)}(k))^i]^{\mathrm{T}} \tag{27}$$

Kalman 滤波增益为

$$\boldsymbol{K}_k^i=\boldsymbol{P}_{xy}^i(k)[\boldsymbol{S}_y^i(k)\quad(\boldsymbol{S}_y^i(k))^{\mathrm{T}}]^{-1} \tag{28}$$

⑥ 根据滤波方程进行状态估计 $\hat{\boldsymbol{x}}_k^{(i)}$：

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^i=\bar{\boldsymbol{x}}_k+\boldsymbol{K}_k^i(\boldsymbol{y}_k-\bar{\boldsymbol{y}}_k) \tag{29}$$

更新每个粒子的协方差估计：

$$\hat{\boldsymbol{P}}_k^i=\hat{\boldsymbol{S}}_x^i(k)[\hat{\boldsymbol{S}}_x^i(k)]^{\mathrm{T}} \tag{30}$$

（3）抽样粒子 $\boldsymbol{x}_k^i\sim N(\boldsymbol{x}_k^i,\hat{\boldsymbol{x}}_k^i,\hat{\boldsymbol{P}}_k^i)$。

（4）计算每个粒子的权值 $\boldsymbol{w}_k^i$，并且归一化。

（5）重采样。如果 $N_{eff}<N_{th}$，将权值重新设置为 $\bar{\boldsymbol{w}}_k^i=\frac{1}{N}$，得到等权样本集 $\{\boldsymbol{x}_k^i,\bar{\boldsymbol{w}}_k^i\}$，计算后验概率为

$$\hat{p}(\boldsymbol{x}_k\mid\boldsymbol{y}_k)=\sum_{i=1}^{N}\bar{\boldsymbol{w}}_k^i\delta(\boldsymbol{x}_k-\boldsymbol{x}_k^i) \tag{31}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k=\sum_{i=1}^{N}\bar{\boldsymbol{w}}_k^i\boldsymbol{x}_k^i \tag{32}$$

$$\hat{P}_k=\sum_{i=1}^{N}\bar{\boldsymbol{w}}_k^i(\hat{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_k^i)(\hat{\boldsymbol{x}}_k-\boldsymbol{x}_k^i)^{\mathrm{T}} \tag{33}$$

2　改进 SCDPF 算法

2.1　权值优选思想

传统的重采样方法的本质均是不断简单地对大权值粒子进行重复的复制，对于小权值粒子可以随意丢弃，这样大大损伤了粒子集的多样性，从而不可避免地引发了样本贫化甚至枯竭现象[13]。针对 SCDPF 算法中并未解决的样本贫化问题，本文基于权值优选思想来改进重采样方法，采用引入一个影响因子的方法对不同粒子的权值进行优选，有效改善了重采样后粒子集的多样性。

2.2　算法有效性分析

本文提出的重要性权值优选重采样方法是在每次重采样过程中引入一个影响因子 $\alpha(0<\alpha<1)$，粒子的权重变为 $(\bar{\boldsymbol{w}}_k^{(i)})^{\alpha}$，然后归一化。

$$\tilde{\boldsymbol{w}}_k^{(i)}=\frac{(\bar{\boldsymbol{w}}_k^{(i)})^{\alpha}}{\sum_{i=1}^{N}(\bar{\boldsymbol{w}}_k^{(i)})^{\alpha}} \tag{34}$$

通过调整不同粒子的权值，小权值粒子优选后权值会变大，相反大权值粒子权值会变小，其结果是粒子集多样性明显增加。下面验证该方法的有效性。

首先进行归一化：

$$\bar{\boldsymbol{w}}_k^i=\frac{\boldsymbol{w}_k^i}{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{w}_k^i} \tag{35}$$

因为 $0<\boldsymbol{w}_k^i<1$，所以可以假设归一化后的的权重

关系为 $0<\bar{w}_k^1<\bar{w}_k^2<\cdots<\bar{w}_k^N<1$，经过优化后的权重为

$$\tilde{w}_k^i=\frac{(\bar{w}_k^i)^\alpha}{\sum_{i=1}^N(\bar{w}_k^i)^\alpha}(0<\alpha<1) \tag{36}$$

则

$$\tilde{w}_k^1-\bar{w}_k^1=\frac{(\bar{w}_k^1)^\alpha}{\sum_{i=1}^N(\bar{w}_k^i)^\alpha}-\bar{w}_k^1=\frac{(\bar{w}_k^1)^\alpha(1-\bar{w}_k^1)-[\bar{w}_k^1\cdot(\bar{w}_k^2)^\alpha+\cdots+\bar{w}_k^1\cdot(\bar{w}_k^N)^\alpha]}{\sum_{i=1}^N(\bar{w}_k^i)^\alpha}$$

$$=\frac{[(\bar{w}_k^1)^\alpha\cdot\bar{w}_k^2-\bar{w}_k^1\cdot(\bar{w}_k^2)^\alpha]+[(\bar{w}_k^1)^\alpha\cdot\bar{w}_k^3-\bar{w}_k^1\cdot(\bar{w}_k^3)^\alpha]+\cdots+\bar{w}_k^1\cdot\bar{w}_k^N[\frac{1}{(\bar{w}_k^1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\bar{w}_k^N)^{1-\alpha}}]}{\sum_{i=1}^N(\bar{w}_k^i)^\alpha} \tag{37}$$

（注：$\sum_{i=1}^N\bar{w}_k^i=1\rightarrow\bar{w}_k^1=1-\sum_{i=2}^N\bar{w}_k^i$）

由于 $0<\bar{w}_k^1<\bar{w}_k^2<1$ 且 $(0<\alpha<1)$，所以可得

$$\frac{1}{\bar{w}_k^1}>\frac{1}{\bar{w}_k^2}>1\rightarrow\frac{1}{(\bar{w}_k^1)^{1-\alpha}}>\frac{1}{(\bar{w}_k^2)^{1-\alpha}}>1\rightarrow$$

$$\frac{1}{(\bar{w}_k^1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\bar{w}_k^2)^{1-\alpha}}>0$$

同理：

$$\frac{1}{(\bar{w}_k^1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\bar{w}_k^2)^{1-\alpha}}>0,\cdots,\frac{1}{(\bar{w}_k^1)^{1-\alpha}}-\frac{1}{(\bar{w}_k^N)^{1-\alpha}}>0$$

所以得到式(37)大于零，即 $\tilde{w}_k^1-\bar{w}_k^1>0$。

推导结果表明小权值粒子调整过后权值增大，这样更多的粒子将被复制，从而改善样本贫化现象。

2.3 改进 SCDPF 算法步骤

结合 SCDPF 算法和权值优选思想，改进 SCDPF 算法的步骤描述如下。

① 初始化：$k=0$。粒子数 $i=1,2,\cdots,N$，仿真时间 $k=1,2,\cdots,K$。由先验分布函数获取样本 $\{x_0^i,i=1,2,\cdots,N\}$。

② 重要性密度函数采样：通过 SCDF 算法得到重要性密度函数 $q(\bar{x}_k^i|\bar{x}_{0:k-1}^i,z_{1:k})=N(\bar{x}_k^i,\hat{x}_k^i,\hat{P}_k^i)$，然后进行重要性采样过程。

③ 计算权值：通过式(6)计算权值并进行归一化。

④ 权值优选：引入一个影响因子 α 对不同粒子的权值进行优选，然后再归一化。

$$\tilde{w}_k^i=\frac{(\bar{w}_k^i)^\alpha}{\sum_{i=1}^N(\bar{w}_k^i)^\alpha} \tag{38}$$

⑤ 重采样：根据 $\tilde{w}_k^i$ 对粒子集 $\{x_k^i\}_{i=1}^N$ 进行重采样，新的 N 个粒子的集合为 $\{\tilde{x}_k^i\}_{i=1}^N$，再次计算权值为 $w_k^i=1/N$。

⑥ 状态估计：

$$\hat{x}_k^i=\sum_{i=1}^N w_k^i\tilde{x}_k^i,P_k^i=\sum_{i=1}^N w_k^i[\tilde{x}_k^i-x_k^i][\tilde{x}_k^i-x_k^i]^{\mathrm{T}} \tag{39}$$

⑦ 返回步骤②。

3 仿真结果与分析

通过仿真实验来验证本文所提算法的优越性，分别采用 SCDPF 算法和改进 SCDPF（ISCDPF）算法对非线性、非高斯系统进行状态估计，系统的状态方程和量测方程分别为

$$x(k)=1+\sin(0.04\pi k)+0.5x_{k-1}+u_{k-1} \tag{40}$$

$$y(k)=0.2x_k^2+v_k,k\leqslant30 \tag{41}$$

$$y(k)=0.5x_k^2-2+v_k,k>30 \tag{42}$$

式中，量测噪声 v_k 服从 Gamma 分布 $\gamma(3,2)$，系统噪声 u_k 为高斯白噪声，其方差为 1×10^{-5}。

参数设置：时间间隔 $\Delta t=1$，迭代步数 $T=60$，粒子数 $N=100$，初始位置 $x_0=1$，初始状态方差 $\mathrm{int}Var=0.75$，得到仿真结果如图 1 ~ 图 3 所示。

图 1 和图 2 是两种算法的跟踪效果对比图和估计误差对比图。从这两幅图可以看出 SCDPF 算法与 ISCDPF 两种算法都能比较精确地跟踪目标，这是因为这两种算法使用的是协方差矩阵的平方根，这样确保相比于用先验分布得到的重要性密度函数和融入了部分的传播时协方差矩阵的半正定性，具有极好的数值特性，滤波精度要高于无味滤波，更加接近真实的后验分布，解决了粒子退化问题。相比于 SCDPF 算法，ISCDPF算法的跟踪效果更加理想，原因是ISCDPF算

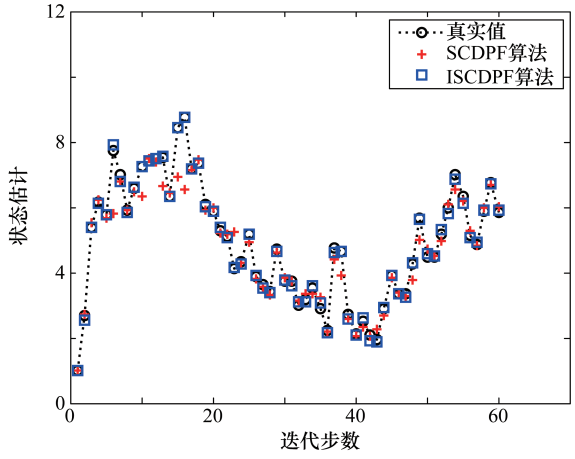


图 1 SCDPF 与 ISCDPF 的状态估计

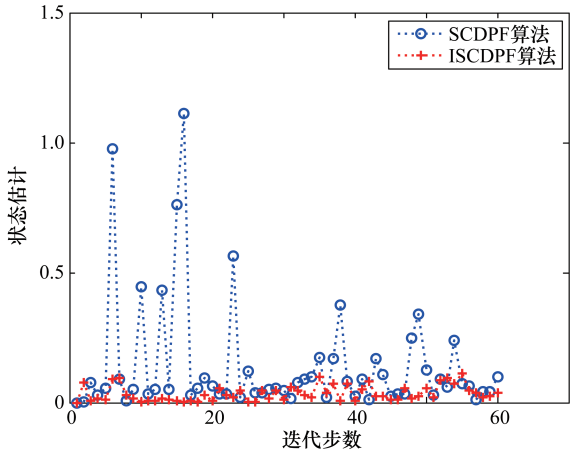


图 2　SCDPF 和 ISCDPF 的估计误差图

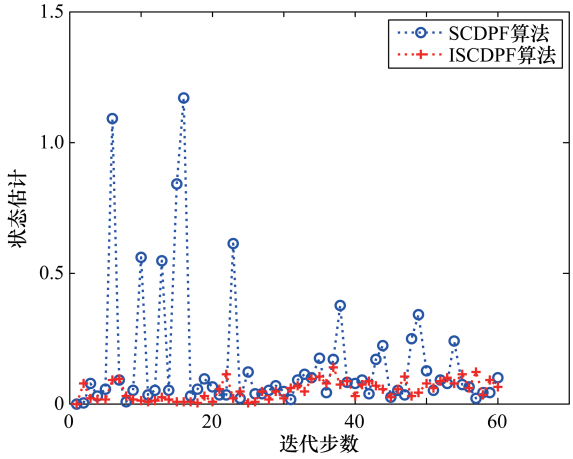


图 3　SCDPF 和 ISCDPF 均方根误差对比图

法通过权值优选重采样方法增加了粒子的多样性，改善了样本贫化问题。同时影响因子的取值也会在一定程度上决定跟踪的效果，其值过大或过小都不能得到理想的效果。经过多次实验，当影响因子 α 取 0.7 时，效果最好。

图 3 为继续进行 10 次蒙特卡罗实验得到的两种算法不同时刻的均方根误差（Root Mean Square Error，RMSE），计算公式为

$$RMSE(\hat{x}_k) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_k^i)^2 \tag{43}$$

式中，N 为蒙特卡罗次数；$\bar{x}_k^i = x_k - \hat{x}_k$。

最后通过多次实验求得两种算法的运行时间，对不同时刻两种算法的均方根误差求平均值，得到平均均方根误差，如表 1 所示。

表 1　两种算法的平均 RMSE

算法	平均 *RMSE*	运行时间/s
SCDPF	0.0653	0.5122
ISCDPF	0.0288	0.3941

从图 3 以及表 1 可以看出，本文算法大大提高了滤波精度，同时使得算法保持了较高的运算效率。

4　结束语

本文从粒子退化和样本贫化问题出发，提出了基于权值优选的 ISCDPF 波算法，有以下两方面的改进：① 利用 SCDF 方法来获取最合适重要性密度函数，融入最新的量测值来解决粒子退化问题；② 利用权值优选的思想，引入影响因子来改进重采样方法，增加了粒子集的多样性，有效避免了样本贫化的现象。仿真结果表明，与 SCDPF 算法相比，改进算法的状态估计结果更加接近目标真实的状态估计，同时平均均方根误差更低、跟踪效果更佳且保持了较高的运算效率。

参考文献：

[1] 廖亮，庞策. 一种改进 Unscented 粒子滤波及其应用研究[J]. 测控技术，2018，37(3)：79－82.

[2] 吴孙勇，薛秋条，朱圣棋，等. 杂波环境下基于粒子滤波的微弱扩展目标检测前跟踪算法[J]. 雷达学报，2017，6(3)：252－258.

[3] 吴兆平，朱凯然，苏涛，等. 采用改进粒子滤波的雷达扩展目标检测前跟踪[J]. 西安电子科技大学学报(自然科学版)，2011，38(2)：99－104.

[4] ZOU J Y，WU C H，MA T G. Heterogeneous integrated beam-switching/retrodirective array using synthesized transmission lines[J]. IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques，2013，61(8)：3128－3139.

[5] WAN E A，VAN DER M R. The unscented Kalman filter for nonlinear estimation[C]//Proceeding of The IEEE 2000 Adaptive Systems for Signal Processing，Communications，and Control Symposium. 2000：153－158.

[6] GORDON N J，SALMOND D J，SMITH A F M. Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation[J]. IEE Proceedings F-Radar and Signal Processing，1993，140(2)：107－113.

[7] 朱军. 基于权值优化的粒子滤波算法研究及其在目标跟踪中的应用[D]. 合肥：安徽建筑大学，2014：1－61.

[8] 石勇，韩崇昭. 二阶中心差分粒子滤波算法[J]. 西安交通大学学报，2008，42(4)：409－413.

[9] 朱志宇. 粒子滤波算法及其应用[M]. 北京：科学出版社，2010.

[10] 李翠芸，姬红兵. 快速 Metropolis-Hastings 变异的遗传重采样粒子滤波器[J]. 系统工程与电子技术，2009，31(8)：1968－1972.

[11] 杜正聪，辛强，邓寻，等. 基于权值优化的粒子滤波算法研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版)，2015，32(3)：124－129.

[12] 王旭阳，王智勇. 一种自适应免疫优化的无迹粒子滤波器[J]. 计算机工程与应用，2013，49(4)：231－235.

[13] 熊剑，刘建业，赖际舟，等. 基于二阶插值滤波的粒子滤波改进算法研究[J]. 控制与决策，2009，24(6)：907－910.

□